Entfernungen in der Schwarzschildmetrik

Ich

August 8, 2008

Abstract

Kurzer Abriss über den Umgang mit einer Metrik und Koordinaten: Erläuterung der zugrunde liegenden Konzepte in flacher Raumzeit, Anwendung der Konzepte in der Schwarzschildmetrik. Erläuterung von Abstandsdefinitionen im Gegensatz zu Koordinatendefinitionen. Nachvollziehen der Berechnungen und Deutungen von Prof. Rössler, mit Herausarbeiten der enthaltenen Fehler und Ungenauigkeiten. Beispiel einer Koordinatensubstitution, um die Koordinatenlichtgeschwindigkeit konstant zu halten.

Eine Metrik ist die mathematische Beschreibung einer bestimmten gegebenen Raumzeit. Für diese Beschreibung werden im allgemeinen Koordinaten verwendet. Der Unterschied zur vorrelativistischen Physik ist, dass der Raum nicht mehr als absolut gesehen wird. Das bedeutet, dass den Koordinaten (z.B. x, t) nicht zwangsweise direkte physikalische Bedeutung zukommt, wie z.B. dass x für eine echte Länge steht oder t für eine echte Zeit. Um aus Koordinaten die echten Größen wieder zu gewinnen gibt es die Metrik. Diese enthält alle Informationen, um geeignet definierte, prinzipiell messbare Größen zu berechnen.
Im gesamten Dokument werden geometrische Einheiten ($c = G = 1$) verwendet.

1 Flach

Ein einfaches Beispiel ist die Minkowski-Metrik der speziellen Relativitätstheorie:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1}$$

Zur Linken steht ds zum Quadrat. ds ist das so genannte *Linienelement*, welches einer "echten" Größe entspricht.
Wir stellen fest, dass diese "echte" Größe nicht als s oder Δs geschrieben ist, also etwas ausgedehntem, sondern als ds, einem infinitesimal kleinen Element eben. Der Grund dafür ist, dass in einer gekrümmten Raumzeit oder auch nur krummen Koordinatensystemen die Berechnungsvorschrift, also die Metrik, sich von Punkt zu Punkt ändert. Sie ist also i.A. tatsächlich nur für klitzekleine ds und dt und so gültig. Wann immer man Aussagen über ausgedehnte Intervalle machen will, muss man über diese kleinen Teilstücke integrieren. Mühsam, aber hilft nichts.
Was ist diese echte Größe, die hinter ds steckt? Kommt darauf an: für $ds^2 < 0$ ist $\tau = \sqrt{-ds^2}$ ein Stückchen Eigenzeit. Für $ds^2 > 0$ ist ds ein kleiner räumlicher Abstand, Ruhelänge. $ds = 0$ bedeutet, dass dem Intervall weder Eigenzeit noch

Ruhelänge zugeordnet werden kann, man spricht von "lichtartig", weil genau Licht sich entlang Kurven bewegt, deren $ds = 0$ ist.
Wir führen den Umgang mit der Metrik anhand zweier Abstandsdefinitionen vor.

- Der Ruheabstand S zwischen zwei Punkten: Die Länge der Verbindungslinie der Punkte mit den Koordinaten x_1, x_2, wobei alle Ereignisse der Verbindungslinie *gleichzeitig zueinander* im jeweiligen Koordinatensystem sind. Das heißt: $dt = 0$. Wir wollen auch alles nur in x-Richtung spielen lassen ($dy = dz = 0$) und damit bekommen wir aus der Metrik:

$$\begin{aligned} ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2, \\ ds = dx, \\ S = x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{2}$$

- Der Radarabstand R zwischen zwei Punkten: In x_1 wird ein Lichtsignal ausgesendet, bei x_2 reflektiert und bei x_1 wieder aufgefangen. Die Hälfte der zwischen Aussenden und Auffangen verstrichene Eigenzeit bei x_1 (in SI-Einheiten noch dividiert durch c) wird als "Radarentfernung" bezeichet. Dafür braucht man zwei Schritte:
  erst holen wir uns die verstrichene Koordinatenzeit Δt

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 = -dt^2 + dr^2 \\ dt = dx \\ \Delta t = x_1 - x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

  dann rechnen wir in Eigenzeit am feststehenden ($dx = 0$) Ort x_1 um

$$\begin{aligned} ds^2 = -dt^2 \\ d\tau = dt \\ \Delta\tau = \Delta t \end{aligned} \tag{4}$$

  und erhalten

$$R = \Delta\tau = \Delta t = x_1 - x_2. \tag{5}$$

Dass R und S gleich sind in Minkowskikoordinaten sollte nicht verwundern, diese Koordinaten sind genau so definiert worden, dass das gilt.
Zum Abschluss noch die Metrik der flachen Raumzeit in Polarkoordinaten:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \tag{6}$$

2 Krumm

Wir betrachten die Schwarzschild-Metrik in ihrer üblichen Form

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + \frac{1}{(1 - \frac{2M}{r})}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \tag{7}$$

Man erkennt den Unterschied zu (6): die Metrikkoeffizienten für dt^2 und dr^2 hängen nun explizit von der Radialkoordinate r ab, ändern sich also von Ort zu Ort. Das macht uns aber nichts, weil wir ja immer von diesen winzigen dr und so ausgehen, an denen sich wegen ihrer Kleinheit nichts ändert.

- Wieder zuerst der Ruheabstand S, die Länge der Verbindungslinie $r_1 \rightarrow r_2$ bei $dt = 0$:

$$ds^2 = \frac{1}{(1 - \frac{2M}{r})} dr^2 \tag{8}$$

$$ds = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{2M}{r})}} dr$$

$$S = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{2M}{r})}} dr$$

$$S = r_2\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}} - r_1\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}} + M \ln \frac{r_2 - M + r_2\sqrt{1 - \frac{2M}{r_2}}}{r_1 - M + r_1\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}}$$

  Unschön, zugegeben, aber man überzeugt sich davon, dass nach wie vor bestimmte Anforderungen erfüllt werden, die man an einen Abstand so stellt: er ist bei Vertauschung von r_1 und r_2 bis aufs Vorzeichen gleich, also in beide Richtungen gemessen derselbe. Und er ist additiv, d.h. der Abstand $r_1 \rightarrow r_2$ ist gleich der Summe der Abstände $r_1 \rightarrow r_m$, $r_m \rightarrow r_2$, wenn r_m ein beliebiger Punkt zwischen r_1 und r_2 ist.
  Es schadet auch nicht, zu erwähnen, dass es genau die Distanz S ist, die man messen würde, wenn man sich zu Fuß (also langsam, bei schnell wird es weniger durch Lorentzkontraktion) von r_1 nach r_2 begibt. Zu bemerken ist hier, dass Geschwindigkeit relativ zur Straße (deren Bestandteile konstantes r haben, also nicht fallen) definiert ist und damit nur bis zum Ereignishorizont. Dahinter fällt auch die Straße mit rein.
  Abschließend stellen wir fest, dass S endlich ist.

- Jetzt wieder der Radarabstand. Erst holen wir die verstrichene Koordinatenzeit für den Lichtweg ($ds = 0$).

$$ds^2 = 0 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + \frac{1}{(1 - \frac{2M}{r})} dr^2 \tag{9}$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{(1 - \frac{2M}{r})}$$

$$T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(1 - \frac{2M}{r})} dr$$

$$T = r_2 - r_1 + 2Mln\frac{r_2 - 2M}{r_1 - 2M}$$

  Und jetzt wieder die Eigenzeit beim ruhenden Beobachter ($dr = 0$) an r_1.

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 \tag{10}$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}} dt$$
$$R = \tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}} T$$

Die Radarentfernung entspricht also der Eigenzeit, die an r_1 verstreicht, während ein Lichtsignal zu r_2 und wieder zurück reist. Wenn nun $r2$ sich am oder im Ereignishorizont ($r = 2M$) befindet und r_1 nicht, ist klar, dass das Lichtsignal ganz einfach *nicht* zurückkommt, der Beobachter entsprechend lange warten muss und die so definierte Radarentfernung R unendlich wird.
Ferner sieht man, dass es für die verstrichene Koordinatenzeit T bis aufs Vorzeichen egal ist, ob der Lichtstrahl erst von r_1 kommt oder von r_2. Das macht erst einen Unterschied für R, weil die Zeitdilatation zwischen r_1 und r_2 berücksichtigt wird. Dieselben Lichtwege (es sind ja tatsächlich dieselben, nur in anderer Reihenfolge), dieselbe verstrichene Koordinatenzeit, bedeuten wegen der gravitativen Zeitdilatation außen eine längere verstrichene Eigenzeit (R) als innen.

Wir haben hier zwei Entfernungsmaße mit unterschiedliochen Bedeutungen definiert.
S ist das, was man am ehesten als den "echten Abstand" in der Schwarzschildmetrik bezeichnen würde. Dieser Abstand kommt raus, wenn mit Meterstäben (das dürfen auch Lichtsignale sein, wenn sie nur über kurze Entfernungen geschickt werden) gemessen wird. Folgerichtig (Beweis ist umständlicher, aber immer noch weniger als eine Seite) ist S/v auch die Eigenzeit, die verstreicht, um mit geringer lokaler Geschwindigkeit v von r_1 nach r_2 zu gelangen. Diese Zeit ist endlich, auch für $r_2 = 2M$!
R ist erst mal nur eine Lichtlaufzeit. Das ist Vor- und Nachteil gleichzeitig. Vorteil, weil Lichtlaufzeiten genau das sind, was man mit größter Genauigkeit messen kann. "Meterstäbe" wie bei S sind im Vergleich doch eher Gedankenexperimente. Nachteil, weil jede Verzögerung des Lichtsignals per definitionem als Abstandsänderung gesehen wird. Das tut jemandem, der ein wenig Erfahrung in solchen Sachen mitbringt, nichts. Jemand, der nicht weiß, wofür eine Metrik gut ist, und für den "Abstand" gleich "Abstand" ist, egal was wie definiert wurde, wird sich verirren. Ein Beispiel dafür kommt im nächsten Abschnitt.

3 Falsch

Wir beziehen uns hier auf Rösslers Papier *Abraham-like return to constant c in general relativity: $\Re$ -theorem demonstrated in Schwarzschild metric.*
Dort finden wir in Gl. 1-9 die hier gemachten Berechnungen, allerdings bereits mit einem wichtigen konzeptuellen Haken: statt die Abstände in ihrer Bedeutung sauber zu definieren und mithilfe der Metrik zu berechnen, ist sein Ausgangspunkt die Koordinatengeschwindigkeit des Lichts dr/dt. Dementsprechend spricht er auch von "Distance Integrals" als grundlegenden Komponenten der Beschreibung, statt den Sinn derselben in den Vordergrund zu stellen. Es werden "time-shrinking-factors" und "size increases" verwendet, statt die Zusammenhänge zwischen Koordinatenwerten und messbaren Größen herauszuarbeiten.

Diese Begriffsverwirrung macht das Papier nicht nur schwer zu lesen und zu deuten, sie ist auch die unmittelbare Ursache für Rösslers falsche Ergebnisse ab Gl. 10. Dass Rössler nicht auffällt, wie inkonsistent seine Beschreibung ist, hat genau denselben Grund: fundamentales Unverständnis der Zusammenhänge.
Bezeichnend seine Einleitung zu den revolutionären Erkenntnissen: *The postulated new local size-change d? of Eq.(10) has exactly the same form as the local size-change dR of Eq.(8) above. Therefore there are two possibilities open at this point: Either the new size change factor of Eq,(10) is nothing but a new re-derivation of the old factor of Eq.(8); then the traditional radial distance R of Eq.(9) remains the only physically relevant radial distance in the Schwarzschild metric. Or both size change factors (the old dR/dr and the new $d\rho/dr$) contribute on an equal footing locally if the new size change of Fröhlich and Kuypers is real.*
Rössler will also mal ausprobieren, was passiert, wenn man einen weiteren "size change factor" einfügt. Schon geht's los: er fügt ihn nicht an die richtige Stelle der Metrik ein, sondern in eines dieser "Distance Integrals". Welches, ob R oder S, lässt er erstmal offen und definiert ein neues solches:

$$d\Re = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr \tag{11}$$

Das kann nun alles mögliche sein, von einer Koordinatendefinition bis hin zu einer Änderung der Metrik. Wir erhalten Aufschluss durch folgenden Satz:
The new distance integral $\Delta\Re$ ("$\Re$ - distance") replaces the traditional distance integral ΔR of Eq.(9) (hier: Gl.(8))as the correct "radial distance" - if the new Fröhlich-Kuypers size change factor is added while everything else remains unchanged.
Das heißt, $\Re$ ersetzt S - wenn wir Gl.(8) rückwärts gehen, sehen wir, was das bedeutet: $d\Re = ds$. Zusammen mit Gl.(11) - wenn wir, wie gefordert, alles andere gleich lassen - ergibt das die Metrik:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + \frac{1}{(1 - \frac{2M}{r})^2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \tag{12}$$

Und da liegt der Hund begraben: Durch die Identifikation von $d\Re$ mit dem Wegelement ds kommt Rössler auf seine Aussagen
"Here it is not the new factor of Eq.(10) which is surprising but the fact that it no longer stands alone in determining size in the Schwarzschild metric due to the presence there of the old factor of Eq.(8)." (hier sehen wir auch, dass Rössler eigentlich klar ist, dass er die Metrik verändert hat)
"According to the achieved new semantics, the same distance thus is really infinite from above."
"In spite of the harmony obtained, there exists a derived secondary implication which appears virtually unacceptable: Black holes can now no longer be reached in finite time - not only by light with its infinite radar-sounding delay for which this fact is well known as we saw (Eq.5 and Shapiro), but by any infalling object. The result is so strong it even remains true when the falling time is measured in terms of the proper time of the infalling object itself! For the relative distance is now "really infinite" (R is infinite for $r = 2m$)." (Passt zu und benötigt ebenfalls $d\Re = ds$)
Diese Zitate nebst den Berechnungen ergeben ein konsistentes Bild: In die

Metrik wurde ein neuer Faktor eingeführt, und aus dieser Metrik lassen sich dann die genannten Aussagen herleiten. Nur eine Kleinigkeit stört hier: diese geänderte Metrik ist nunmal nicht die Schwarzschildmetrik, sie erfüllt nicht die Feldgleichungen, und hat auch sonst nichts mit der Wirklichkeit zu tun. Genausowenig wie die abgeleiteten Aussagen; die Änderung von S ist messtechnisch noch schwierig nachweisbar, aber, und das hat Rössler "vergessen" auszuführen, nicht nur S ändert sich, sondern in konsequenter Weise auch T und damit R. Man überzeugt sich (als Übung), indem man R nach demselben Prinzip nochmal aus Gl.(12), der "Rösslerschen Metrik", herleitet. *Diese* Änderungen sind hochgradig inkompatibel mit allen Messungen.

Besonders interessant ist nun aber, dass wir in genau demselben Abschnitt eine Parallelwelt vorfinden, in der Rössler die Meinung vertritt, überhaupt nichts geändert zu haben, also eigentlich nur eine Koordinatentransformation durchgeführt zu haben. Belege:

Unexpectedly, Eq.(12) is identical to Eq.(4) above. Thus nothing has been introduced in effect as far as measured distances are concerned! The above employed "roundabout way" of heuristically using two local size changes - the old Schwarzschild factor of Eq.(8) and the hypothetical new Fröhlich-Kuypers factor of Eq.(10) - in order to explain the old radar distance of Eq.(4) proves to be a perfectly legitimate option.

But there now exists an alternative interpretation: the new size change axiom of Eq.(11) can be invoked. Adopting this interpretation is equivalent to saying that it is "not a change in c but a change in distance" that has been measured. This means that the two identical distances, $c\Delta t$ of Eq.(4) and $\Re$ of Eq.(12), can both be re-named into a single distance

The new "Abrahamian interpretation" of Eq.(13) is equivalent to the standard interpretation of the radial Schwarzschild metric - as far as predicted redshifts, time delays for light and any resulting formal distances are concerned - yet with c globally constant.(Diese Aussage ist de facto falsch; sie wäre richtig, wenn $\Re$ nur eine neu eingeführte Koordinate wäre, wie ich später zeige)

Nun, man muss Rössler zugute halten, dass ihm irgendwie auffällt, dass da was nicht stimmen kann. Wie kann er andere Voraussagen machen als die ART, wenn er doch nichts geändert hat? Die Auflösung dieses Rätsels ist für Gourmets:

Hence the above "change in semantics" is more than a mere change of words for once: it has tangible physical consequences. Since this cannot be the case by very definition, some previously accepted physical facts are bound to have been in error!

Da haben wir's: weil seine Aussagen offensichtlich widersprüchlich sind, muss es so sein, dass - nein, nicht etwa dass er da was missverstanden oder sich anderweitig vertan hätte - die Schulphysik falsch ist.

Wir lassen das so stehen zu Genießen. In dem Papier kommen noch Rechtfertigungen, warum es trotdem keinen Sinn hat, in der Schulphysik nach dem Fehler zu suchen (weil diese ja den Test der Zeit bestanden hat), und ein weiterer "Beweis" (dies hier war ja keiner, sondern nur eine Behauptung) für seine These. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass auch dieser falsch ist, der "Sprossenabstand", von dem er spricht, ist nicht konstant für bewegte Beobachter, und das ist leicht nachrechenbar. Jetzt wollen wir nocht zeigen, was Rösslers zweites Ich zu tun glaubte, eine Koordinatentransformation, die die radiale Lichtgeschwindigkeit konstant hält - in der Schwarzschildmetrik, nicht in irgendeiner erfundenen.

4 Richtig

Prinzipiell sind, wie mehrfach betont, Koordinaten nur Hilfsmittel, um die Raumzeit zu kartieren. In dem Sinne müssen sie nicht viel mehr physikalische Bedeutung haben als z.B. Hausnummern. Dementsprechend irrelevant ist es auch, welchen Wert die Lichtgeschwindigkeit dt/dr als Funktion dieser Koordinaten annimmt. Rössler hielt es nun für wichtig, eine konstante Koordinatenlichtgeschwindigkeit zu haben. Hier wollen wir zeigen, wie so etwas prinzipiell erreichbar ist.
Wir können Rösslers Ansatz

$$d\Re = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}dr \tag{13}$$
$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 d\Re^2 = dr^2$$

übernehmen. Wir dürfen nur nicht gleichzeitig diese physikalisch völlig unbegründetete Identifikation von $d\Re$ mit ds fordern. Dann handelt es sich um eine einfache Koordinatensubstitution.
Eingesetzt in (7) erhalten wir die Schwarzschildmetrik in gemischten Koordinaten, also mit sowohl $\Re$ als auch r:

$$ds^2 = -(1-\frac{2M}{r})dt^2 + (1-\frac{2M}{r})d\Re^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \tag{14}$$

Schon hier kann man ablesen, dass für radiale Lichtwege (charakterisiert durch $ds = 0$) die Koordinatenlichtgeschwindigkeit $d\Re/dt$ konstant 1 ist, wie gewünscht. Wir müssen noch r durch $\Re$ ausdrücken. Das Integral von (13) liefert:

$$\Re = r + 2M\ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \tag{15}$$

Das Problem ist nun, diesen Ausdruck nach r aufzulösen. Offensichtlich (d.h. der Computer hat's gesagt, nicht ich gerechnet) kommt raus:

$$r = 2M(W(e^{\frac{\Re}{2M}-1}) + 1), \tag{16}$$

wobei W die - übrigens nicht geschlossen darstellbare - Lambert'sche W-Funktion ist. Schreiben wir kurz W für $W(e^{\frac{\Re}{2M}-1})$, erhalten wir die Metrik

$$ds^2 = -\left(\frac{W}{W+1}\right)dt^2 + \left(\frac{W}{W+1}\right)d\Re^2 + 4M^2(W+1)^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \tag{17}$$

Hier haben wir nun konstante Koordinatenlichtgeschwindigkeit für radiale Lichtstrahlen, zum Preis einer nicht ordentlich berechenbaren Funktion W. Der Koordinatenabstand $\Re$ zum Ereignishorizont ist nun unendlich, das ist aber ohne physikalische Bedeutung. Man muss hinzufügen, dass wir es hier immer noch mit der Schwarzschildmetrik zu tun haben, nur in anderen Koordinaten. Alle Abstandsdefinitionen bleiben zwangsweise dieselben wie in der ursprünglichen Version. Wäre es anders, hätten wir hier etwas falsch gemacht. (Was, nebenbei gesagt, nicht ausgeschlossen werden kann).
Die tangentiale Lichtgeschwindigkeit $ds, d\Re = 0$ hängt immer noch über W von $\Re$ ab. Das lässt sich so leicht nicht beheben, es ist eine direkte Konsequenz

der Raumkrümmung. Man müsste die direkte Bedeutung der Koordinaten θ, ϕ als Winkel aufgeben und z.B. vereinbaren, dass der Vollkreis nicht 360° enthält, sondern einen anderen, von $\Re$ abhängigen Wert. Nur: warum sollte man so etwas tun? Wer braucht schon konstante Koordinatenlichtgeschwindigkeit? Bleiben wir lieber bei der traditionellen Darstellung.